

POHLSCHES RAD / CHAOS (POR)

DANIEL DOLINSKY UND JOHANNES VRANA

INHALTSVERZEICHNIS

1. Vorbereitungen	1
1.1. DGL für eine von außen angetriebene, gedämpfte Feder	1
1.2. Nichtlinearitäten	2
1.3. Weitere lineare Systeme	2
1.4. Hauptmerkmale linearer und nichtlinearer Systeme	2
1.5. Gleichrichter	2
2. Versuchsaufbau	3
3. Auswertungen	4
3.1. Gedämpfte freie lineare Schwingung	4
3.2. Resonanzkurve der angetriebenen Schwingung	7
3.3. Ausschwingverhalten des nichtlinearen Pendels	11
3.4. Bifurkationen des nichtlinearen Pendels	12

1 VORBEREITUNGEN

1.1 DGL für eine von außen angetriebene, gedämpfte Feder

Trägheitskraft:

$$F_T = -ma = -m \ddot{x}$$

Luftreibungskraft

$$F_R = bv = b \dot{x} = 2\delta m \dot{x}$$

Federkraft

$$F_F = kx = m\omega_0^2 x$$

Antreibende Kraft

$$F_A = F_0 \cos \omega t$$

Kräftegleichgewicht

$$\begin{aligned} m \ddot{x} &= -m\omega_0^2 x - 2\delta m \dot{x} + F_0 \cos \omega t \\ \Rightarrow \ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x &= \frac{F_0 \cos \omega t}{m} \end{aligned}$$

Lösungsansatz für diese DGL: $x = Ae^{\lambda t}$

$$m\lambda^2 + b\lambda + k = 0$$

<http://www.dolinsky.de> - daniel@dolinsky.de.
<http://www.vrana.net> - johannes@vrana.net.

$$\Rightarrow \lambda_{1/2} = -\frac{b}{2m} \pm \sqrt{\frac{k^2}{4m^2} - \frac{b}{m}} = -d \pm i\omega_0$$

mit

$$d = \frac{b}{2m}$$

und

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{b}{m} - \frac{k^2}{4m^2}}$$

$$A = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega^2}}$$

$$\tan \phi = \frac{b\omega}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

$$\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{b^2}{2m^2}}$$

1.2 Nichtlinearitäten

Die Schwingung wird nicht linear, wenn die Feder überdehnt wird oder die Geschwindigkeit v zu groß wird. Die Gesetze $F_F = kx$ und $F_R = bv$ gelten also nicht mehr. Die DGL muß ganz anders gelöst werden.

1.3 Weitere lineare Systeme

Weitere lineare Systeme sind mathematische Pendel, elektrische Schwingkreise, Molekülschwingungen oder andere mechanische Wellen. Linearen Systemen liegen immer Idealisierungen (z.B. Masseloser Faden, homogene Massenverteilung) oder Näherungen (z.B. $\sin t = t$) zugrunde. In der Natur sind also nicht lineare Systeme die Regel.

1.4 Hauptmerkmale linearer und nichtlinearer Systeme

Lineare Systeme unterscheiden sich von nicht linearen dadurch, daß in ihnen das Superpositionsprinzip gilt. Einzelne Schwingungen überlagern sich also ohne sich dabei zu stören. In nicht linearen Systemen beeinflussen sie sich gegenseitig. Außerdem gibt es dort eine sogenannte Frequenz-Amplituden-Kopplung. Diese gibt es in linearen Systemen nicht. Solche Abhängigkeiten führen in nicht linearen Systemen zu chaotischem Verhalten.

1.5 Gleichrichter

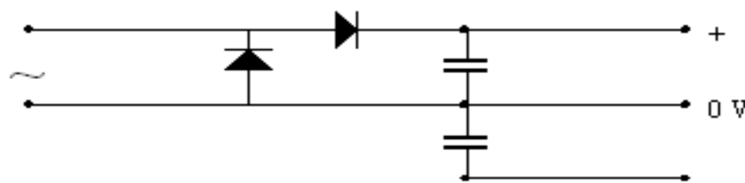


ABBILDUNG 1. Gleichrichter

2 VERSUCHSAUFBAU

Beschreibung: Das POHLSche Rad ist ein **Drehpendel**. In dem Versuch handelte es sich um eine Kupferscheibe mit homogener Massenverteilung und einer an ihr befestigten Spiralfeder, die so angeordnet ist, daß sie der Drehbewegung durch den Schwerpunkt entgegen wirkt. Die Lage kann durch einen Metallzeiger optisch abgelesen werden. Da die natürliche Reibung zu klein ist, kann die Scheibe noch durch eine einstellbare Wirbelstrombremse gedämpft werden. Zusätzlich kann sie noch durch einen E-Motor angetrieben werden, dessen Anregungsfrequenz variabel ist. Ein Computer kann mit Hilfe eines Interfaces mit getimter Meßwerterfassung über zwei Infrarotreflexlichtschranken die Position und so auch die Winkelgeschwindigkeit des Pendels erfassen. Zur Erzeugung eines nicht linearen Systems ist außerdem noch die Möglichkeit gegeben, an dem Metallzeiger ein zusätzliches Gewicht anzubringen.

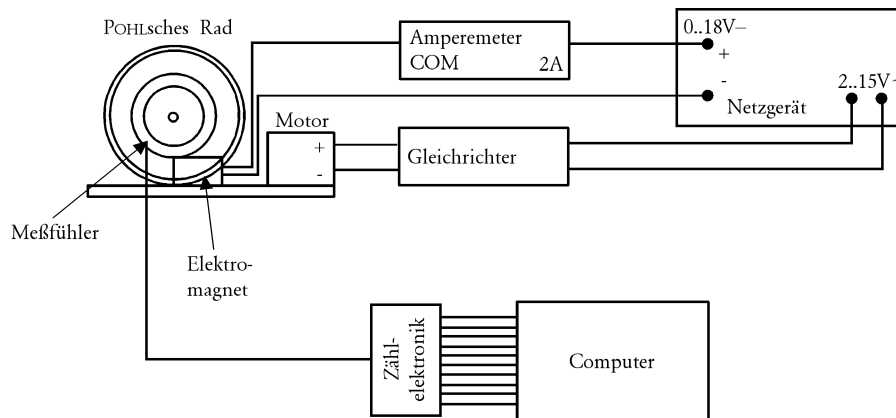


ABBILDUNG 2. Versuchsaufbau

3 AUSWERTUNGEN

3.1 Gedämpfte freie lineare Schwingung

3.1.1 *Visuelle Auswertung.* Das Pendel vollführt eine Schwingung mit der Gleichung:

$$\phi(t) = \phi_0 \cdot e^{-\lambda t} \cdot \cos(\omega t - \beta)$$

mit $\omega = \sqrt{\frac{k}{\Theta} - \lambda^2}$, $\lambda^2 < \frac{k}{\Theta}$, und der Phasenverschiebung β .

Charakteristisch ist die Abklingzeit $\tau = \frac{1}{\lambda}$ und die Eigenfrequenz $f_0 = \frac{\omega}{2\pi}$. Es ist außerdem hervorzuheben, daß die Eigenfrequenz unabhängig von der Amplitude ist. Der Dämpfungsstrom I_D beträgt $(0,398 \pm 0,001)$ A.

Wegen des Fehlers der Uhr und der einzubeziehenden „Schrecksekunde“ mußten wir einen Fehler von $u_{T_{10}} = 0,5$ s annehmen. Außerdem ergab sich dadurch bei allen Messungen eine Schwingungsdauer von $T_{10} = (20 \pm 1)$ s bei zehn Schwingungen.

$$\Rightarrow T = (2 \pm 0,05) \text{ s}$$

$$f_0 = \frac{1}{T} = 0,5 \text{ Hz}$$

$$u = \sqrt{(-1) \cdot \left(\frac{u_T}{T}\right)^2}$$

$$\Rightarrow f = (0,5 \pm 0,025) \text{ Hz}$$

Maximum	Messung					Durchschnitt
	1	2	3	4	5	
1	10	10	10	10	10	10
2	9	9	9	9	9,2	9,04
3	7	7,8	7,5	7,8	7,8	7,58
4	7	7	7	7	7	7
5	6	5	6	6	6	5,8
6	5	5	5	5,3	5,4	5,14
7	4	4	4	4	5	4,2
8	4	3,5	3,5	3,8	4	3,76
9	3	3,2	3	3	3,5	3,14
10	3	2,7	2,5	3	3	2,84

Als Meßfehler nehmen wir hier 0,5 Skalenteiler an.

$$A = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 A_i$$

Der Fehler dazu kann so berechnet werden:

$$u_A = \frac{t}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{1}{4} \sum_{i=1}^5 (A_i - A)^2}$$

Für die Maxima unserer Schwingung gilt:

$$\phi(t_M) = \phi_0 \cdot e^{-\lambda t_M}$$

$$\Rightarrow \lambda = -\frac{1}{t_M} \cdot \ln \left(\frac{\phi(t_M)}{\phi_0} \right)$$

Abklingzeit:

$$\tau = \frac{1}{\lambda}$$

Hier:

$$\lambda \approx 0,055 \text{ Hz}$$

$$\tau \approx 18 \text{ s}$$

Nach unseren Überlegungen kann man auch so rechnen:

$$\lambda = \frac{1}{18} \frac{\ln(\phi_0) - \ln(2,8)}{\ln(\phi_0) - \ln(5)} = 0,10 \text{ Hz}$$

Dieses Ergebnis stimmt aber nicht mit dem anderen überein.

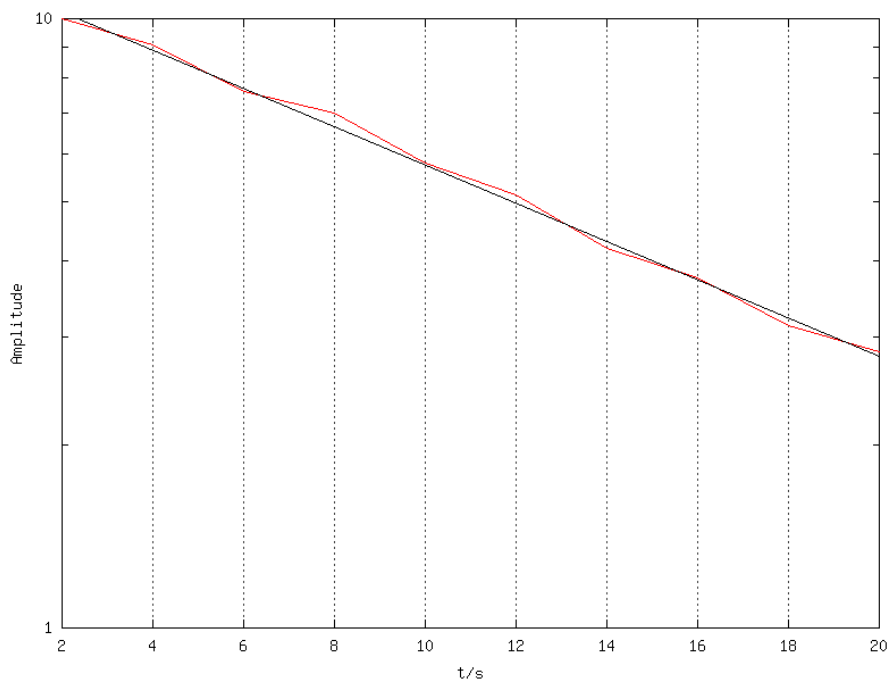


ABBILDUNG 3. Mit dem Auge gemessene Maxima (logarithmisch aufgetragen)

3.1.2 Numerische Auswertung.

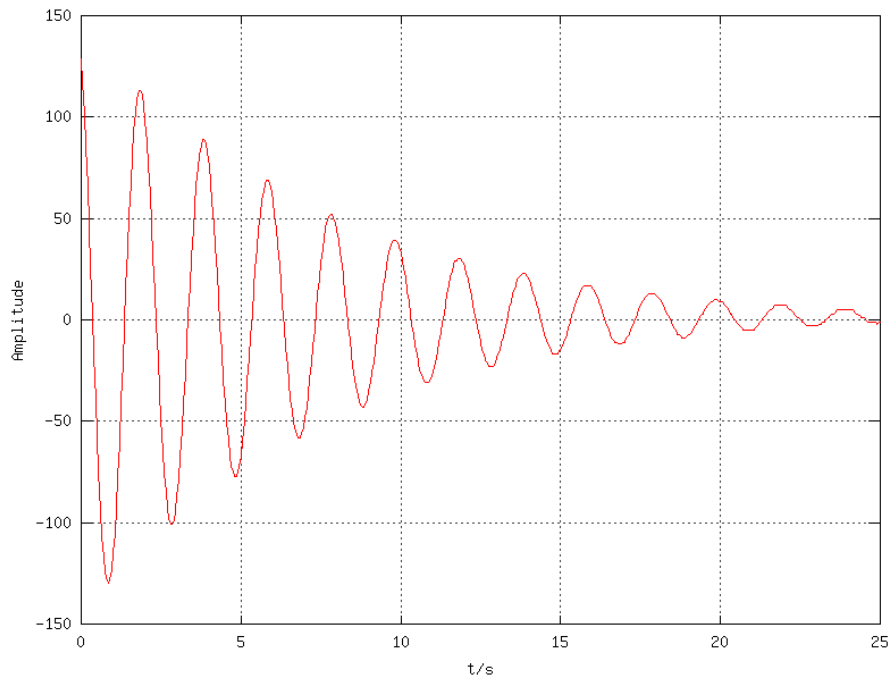


ABBILDUNG 4. Ausschwingen nach Auslenkung von Hand auf Skalenstrich „10“ (bei vollem Dämpfungsstrom)

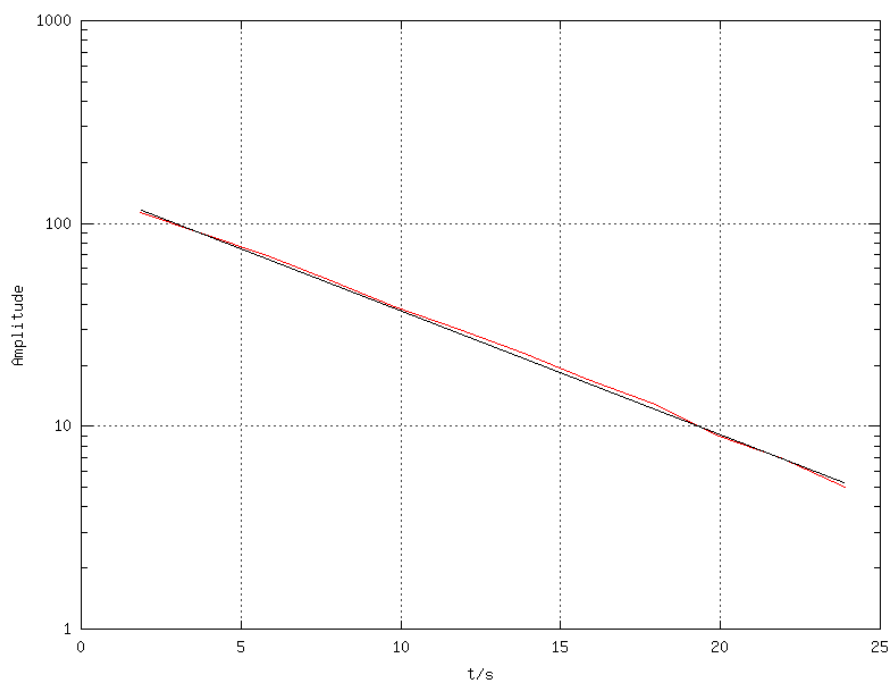


ABBILDUNG 5. Mit dem Computer gemessene Maxima (logarithmisch aufgetragen)

3.2 Resonanzkurve der angetriebenen Schwingung

Reglerstellung: 3

t/s	Amplitude	$\Delta t/s$
0,38	5	
4,75	5	4,37
9,15	5	4,4
13,48	5	4,33
17,78	5	4,3
21,93	7	4,15
26,45	5	4,52
\varnothing	5,29	4,35

Reglerstellung: 4

t/s	Amplitude	$\Delta t/s$
51,18	9	
54,28	9	3,1
57,40	9	3,12
60,58	7	3,18
63,60	9	3,02
66,70	9	3,1
69,83	9	3,13
72,93	9	3,1
76,05	9	3,12
\varnothing	8,79	3,11

Reglerstellung: 4,5

t/s	Amplitude	$\Delta t/s$
100,15	15	
102,80	15	2,65
105,55	14	2,75
108,15	15	2,6
110,85	15	2,7
113,53	15	2,68
116,18	15	2,65
118,85	15	2,67
121,53	15	2,68
124,18	15	2,56
\varnothing	14,9	2,66

Reglerstellung: 5

t/s	Amplitude	$\Delta t/s$
150,33	24	
152,70	25	2,37
155,15	23	2,45
157,43	25	2,28
159,80	25	2,37
162,18	25	2,38
164,55	25	2,37
167,00	23	2,45
169,28	25	2,28
171,65	25	2,37
174,03	25	2,38
\emptyset	24,73	2,37

Reglerstellung: 5,5

t/s	Amplitude	$\Delta t/s$
0,98	109	
3,10	109	2,12
5,23	109	2,13
7,33	109	2,1
9,48	109	2,15
11,58	109	2,1
13,70	109	2,12
15,83	109	2,13
17,93	109	2,1
20,08	109	2,15
22,18	109	2,1
24,30	109	2,12
\emptyset	109	2,12

Reglerstellung: 6

t/s	Amplitude	$\Delta t/s$
50,03	134	
51,98	133	1,95
53,90	133	1,92
55,85	132	1,95
57,78	131	1,93
59,75	131	1,97
61,68	130	1,93
63,60	130	1,92
65,55	130	1,95
67,48	129	1,93
69,43	129	1,95
71,38	129	1,95
73,33	129	1,95
75,25	129	1,92
\emptyset	130,64	1,94

Reglerstellung: 6,5

t/s	Amplitude	$\Delta t/s$
101,08	86	
102,90	85	1,82
104,73	85	1,83
106,55	83	1,82
108,35	83	1,8
110,15	83	1,8
111,98	83	1,83
113,78	83	1,8
115,60	83	1,82
117,40	83	1,8
119,25	83	1,85
121,05	83	1,8
122,85	83	1,8
124,70	83	1,85
\emptyset	83,03	1,82

Reglerstellung: 7

t/s	Amplitude	$\Delta t/s$
150,33	69	
152,05	69	1,72
153,73	68	1,68
155,48	67	1,65
157,13	68	1,65
158,83	68	1,7
160,53	68	1,7
162,20	69	1,67
163,90	67	1,7
165,58	67	1,68
167,28	68	1,7
169,00	69	1,72
170,68	68	1,68
172,38	68	1,7
174,08	68	1,7
175,78	68	1,7
\emptyset	67,9	1,69

$$\omega = \frac{2\pi}{\Delta \bar{t}}$$

Aus dem Graphen der Resonanzkurve: $f_R = 3,2$ Hz. Die Amplitude der Schwingung erreicht bei der Resonanzfrequenz ihr Maximum. Das Maximum liegt bei $A_{\text{Max}} = 131$.

$$\Rightarrow \frac{A_{\text{Max}}}{\sqrt{2}} = 92.63 \approx 93$$

Bei dieser Amplitude ist

$$\Delta\omega_0 \approx 0,19 \text{ Hz}$$

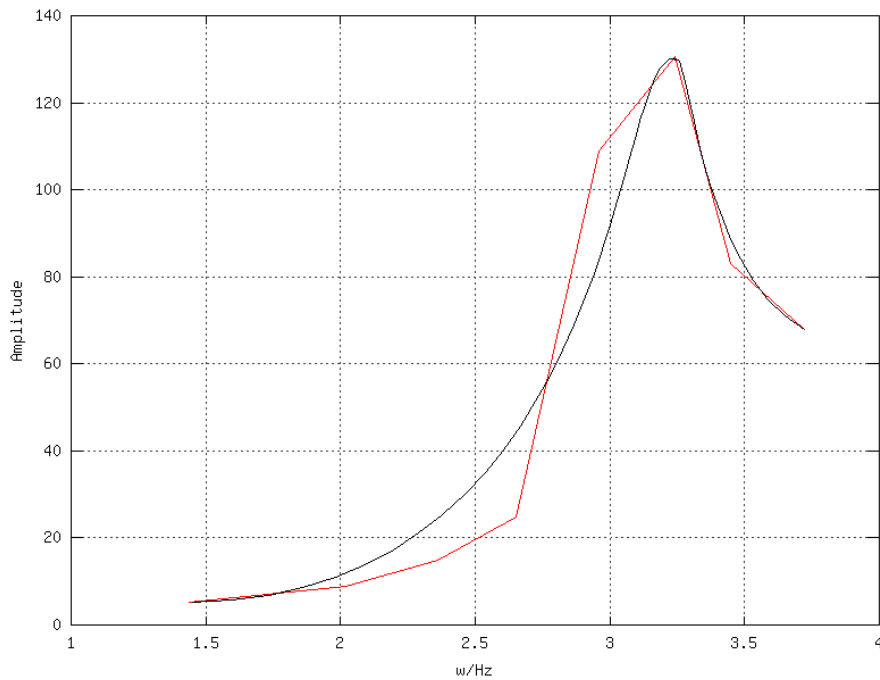


ABBILDUNG 6. Resonanzkurve

Dies entspricht dem vorherigen Wert nicht. Ein Grund für die Abweichung könnte das schlecht einstellbare Netzteil sein. Die Theorie besagt, daß bei $\omega = 0$ die Amplitude den Wert $A(0) = \frac{M_0}{\Theta}$ annimmt. Dies konnte im Versuch aufgrund der Trägheit des Pendels nicht bestätigt werden.

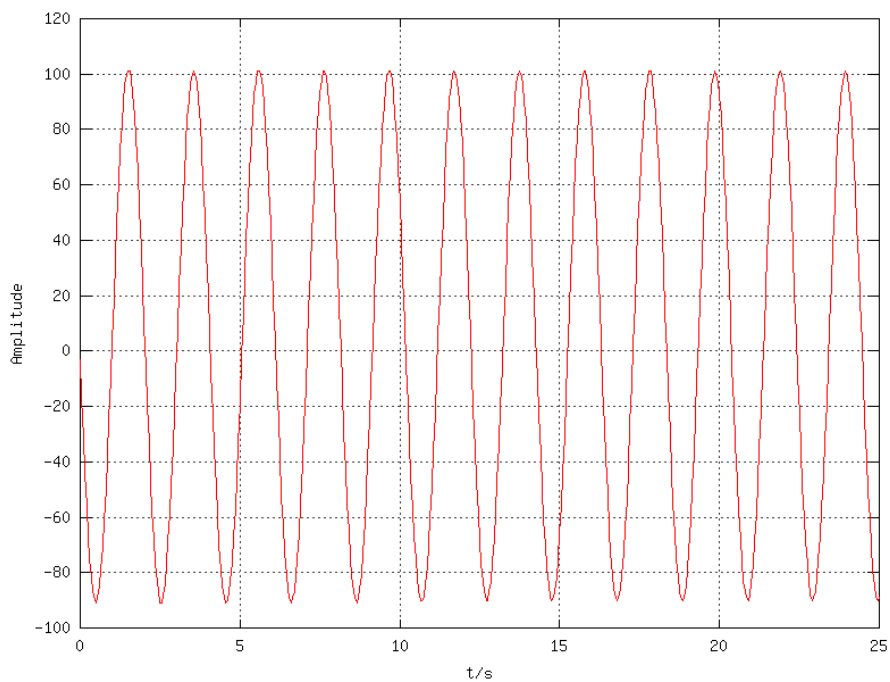


ABBILDUNG 7. Resonanzfall

3.3 Ausschwingverhalten des nichtlinearen Pendels

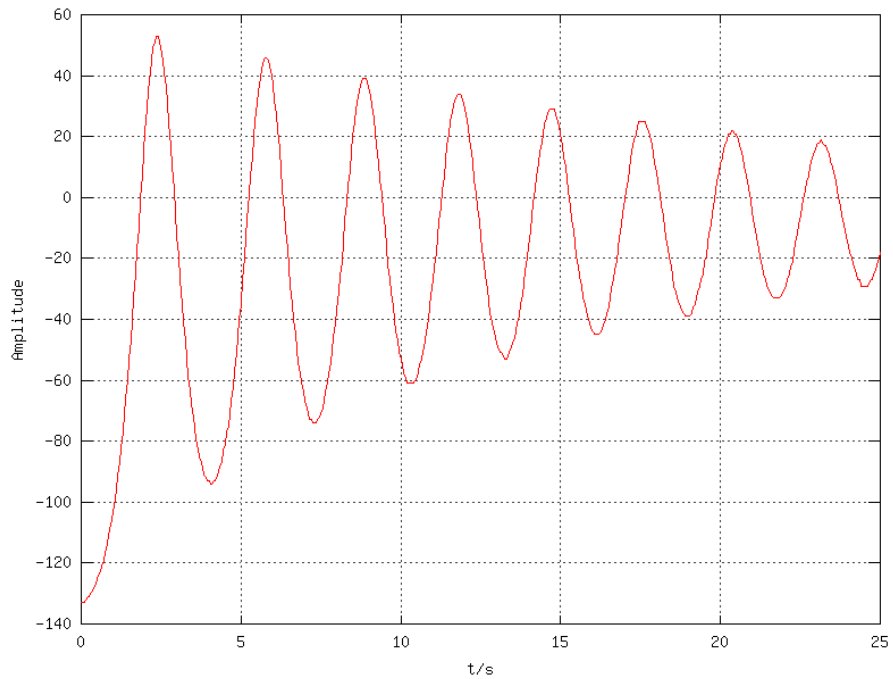


ABBILDUNG 8. Ausschwingen mit Gewicht bei vollem Dämpfungsstrom

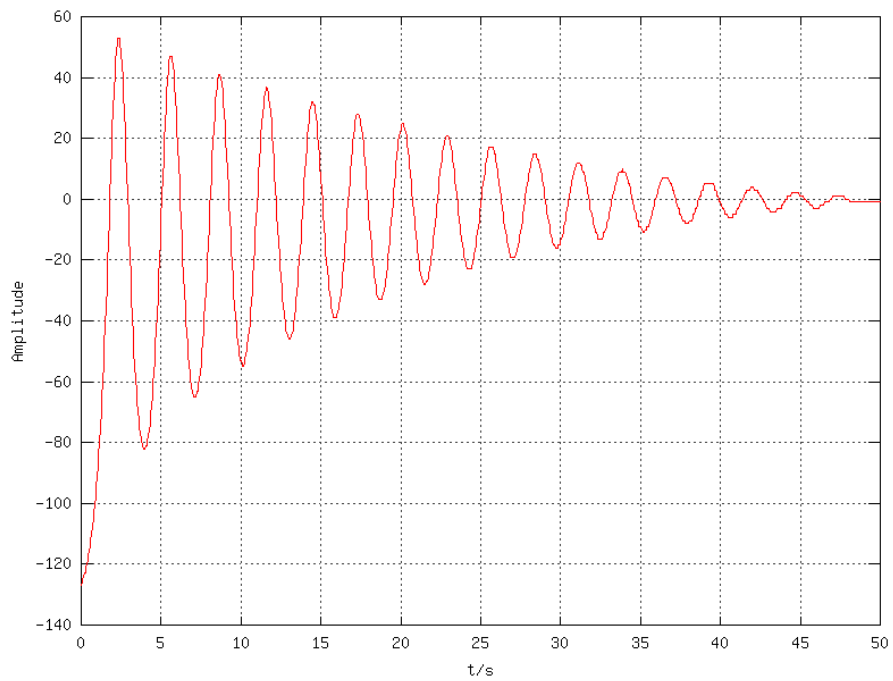


ABBILDUNG 9. Ausschwingen mit Gewicht bei halbem Dämpfungsstrom

3.4 Bifurkationen des nichtlinearen Pendels

3.4.1 1. Bifurkation.

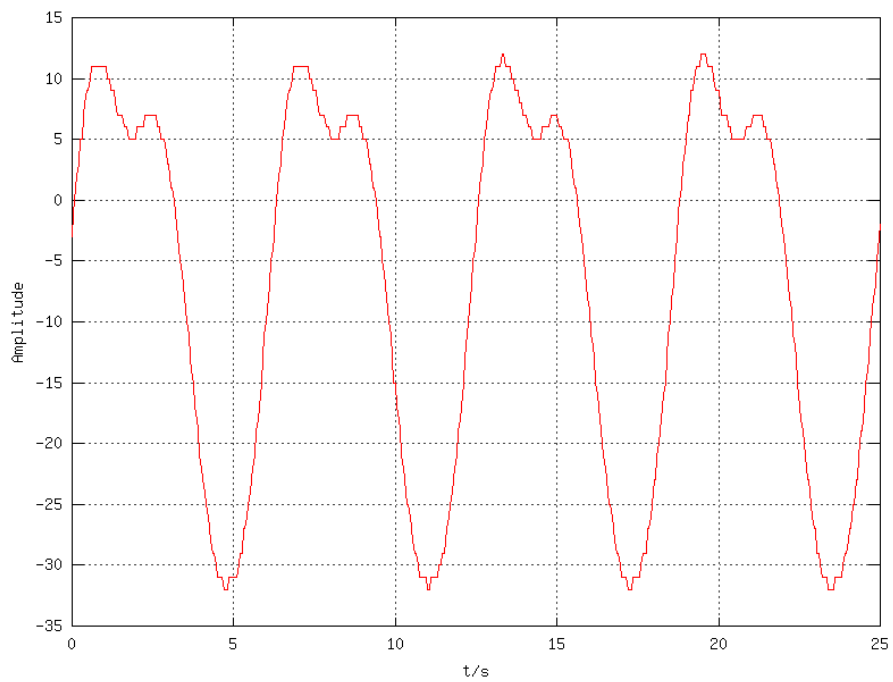


ABBILDUNG 10. Verhalten an der 1. Bifurkation

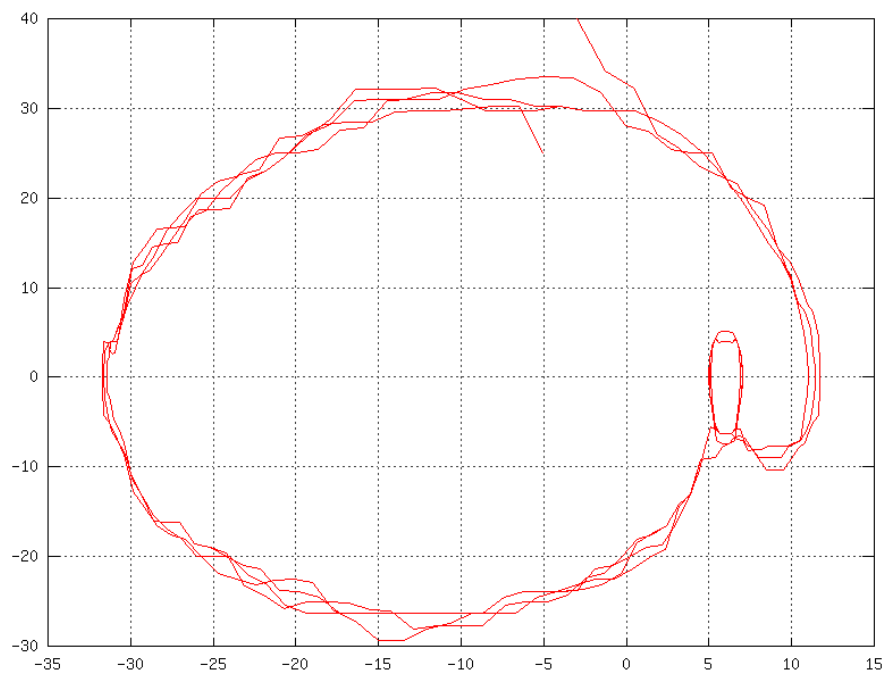


ABBILDUNG 11. Phasendiagramm der 1. Bifurkation

3.4.2 2. Bifurkation.

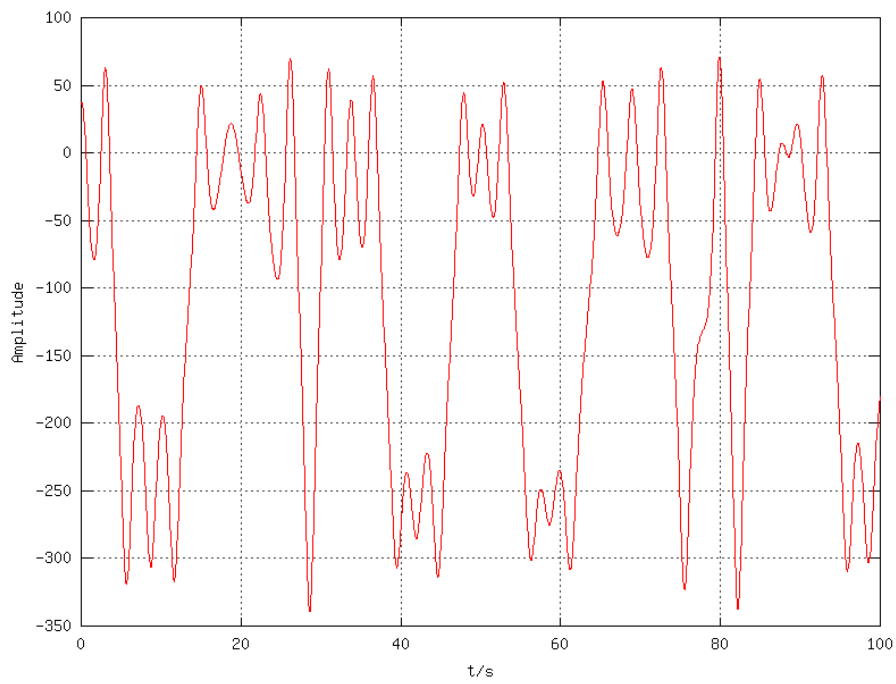


ABBILDUNG 12. Verhalten an der 2. Bifurkation

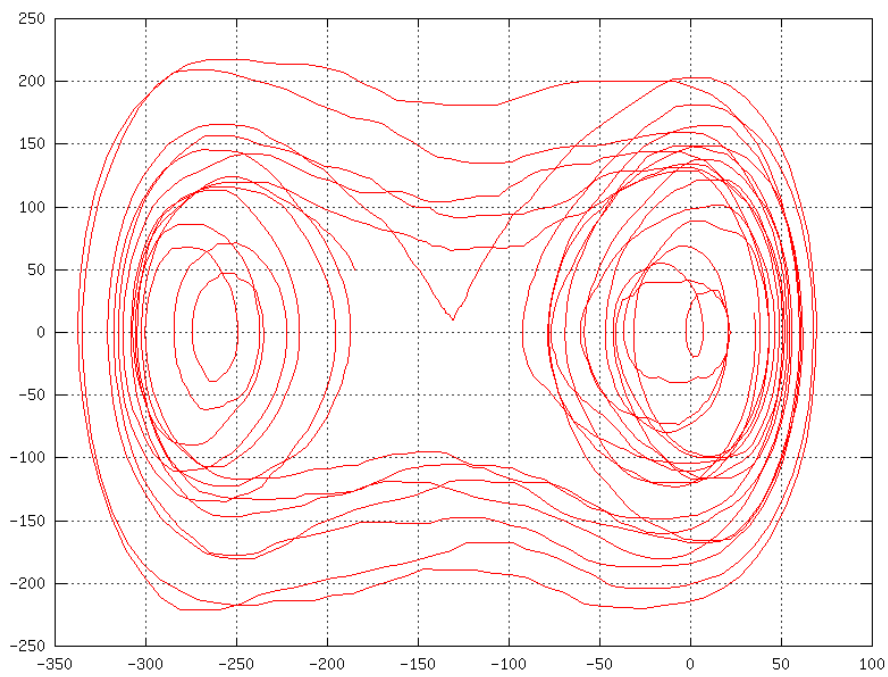


ABBILDUNG 13. Phasendiagramm der 2. Bifurkation